Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

КАФЕДРА Теории управления

Шкорова Кристина Игоревна

Магистерская диссертация

Бикритериальная задача оптимизации пропускной способности железнодорожной сети

Направление 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика»
Магистерская программа
«Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Ногин В.Д.

Рецензент,
кандидат технич. наук
Обоишев М.Ю.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение

В реальной жизни человек постоянно оказывается перед выбором, и, принимая те или иные решения, совершает последовательность определенных действий. Без сомнения, хотелось бы, чтобы эти решения были правильными и выбор был оптимальным.

Задачи оптимального выбора решает теория принятия решений. Данная теория помогает совершать наиболее эффективные и обоснованные решения, а также помогает избежать негативных последствий необдуманного выбора.

Наиболее широкий класс задач выбора составляют многокритериальные задачи. Особенностью данного класса является то, что качество выбранного решения оценивается сразу по нескольким критериям. Многокритериальные модели применяются в различных областях и сферах жизни.

В последнее время огромное внимание уделяется железнодорожной отрасли. Интерес к разработке железных дорог значительно увеличился и результаты исследования в данной области имеют огромный потенциал в будущем. Поэтому одной из важнейших задач для данной отрасли является определение и увеличение пропускной способности железнодорожных транспортных путей.

Для железных дорог можно выделить и охарактеризовать огромное множество различных конкурентных ситуаций, а также определить, в какой степени выбор того или иного исхода повлияет на пропускную способность. Но все эти ситуации сводятся к конкуренции между конкретными поездами.

В данной работе рассмотрена конкуренция между различными типами служб движения поездов – пассажирскими и грузовыми. Таким образом, конкурируют поезда для различных типов сервисов (пассажирские или грузовые), но отдельные поезда также конкурируют со всеми другими поездами сразу.

Целью данной работы является рассмотрение и анализ бикритериальной модели определения оптимальной пропускной способности железнодорожной сети. Для достижения цели исследования были сформулированы следующие задачи:

- Изучить теорию задач многокритериального выбора и ознакомиться с печатными работами, посвященными отысканию оптимальной пропускной способности железнодорожной сети;
- Ограничиться рассмотрением бикритериальной задачи, в которой имеется конкуренция между товарными и пассажирскими поездами.
- Исследовать структуру множества ограничений полученной бикритериальной задачи;
- Сформулировать общий алгоритм решения данной задачи;
- Рассмотреть прикладную задачу, связанную с участком ж\д сети РФ и построить для нее множество Парето;
- Использовать различные комбинированные методы для сужения полученного множества Парето.

Постановка задачи

Рассмотрим бикритериальную задачу оптимизации пропускной способности железнодорожной сети, где между собой конкурируют различные типы служб движения поездов – пассажирские и грузовые. В основе задачи лежит многокритериальная модель, предложенная в статье [1].

Введем следующие обозначения:

I – множество типов поездов;

C – множество коридоров;

S – множество секций;

τ_s – число путей в каждой секции;

Ω_c – множество секций в каждом коридоре.

Предположим, что нам следует определить максимальное число поездов, которые могут пройти через сеть за время T. Таким образом, итоговое число поездов и число поездов каждого типа определяются в результате решения задачи.

$\vec{x}_{ic}$ и $\overleftarrow{x}_{ic}$ – (векторы, направленные в разные стороны) – число поездов типа I, проезжающих по коридору C в каждом направлении соответственно.

$\vec{y}_{is}$ и $\overleftarrow{y}_{is}$ – (векторы направленные в разные стороны) – число поездов типа I, проезжающих по секции S;

$\vec{T}_{is}$ и $\overleftarrow{T}_{is}$ – время, затраченное на секцию в каждом направлении соответственно. Эти значения определяются временем, затраченным только на передвижение (T_{is}), но также они могут определяться еще и другими показателями времени, такими как загрузка-разгрузка пассажиров и груза, поломки, задержки, ускорения или замедления и т.д. Время, затраченное только на движение можно измерить или в качестве него использовать теоретические значения. Например, время свободного перемещения в секции можно посчитать по формуле $T_{is} = {L_s}/{V_i}$, где L_s – длина секции, V_i – скорость поезда.

η_{ci} – доля поездов каждого типа на каждом коридоре. Распределение поездов для каждого коридора выбирается отдельно и удовлетворяет условию $\sum_{i \in I} \eta_{ci} = 1 \; \forall c \in C$.

Перейдем к формулировке задачи определения пропускной способности железнодорожной сети. В данной модели конкурируют различные типы служб движения поездов – пассажирские и грузовые. Другими словами, в данной задаче необходимо максимизировать пропускную способность обоих типов поездов.

Пусть I^P и I^F – количества пассажирских и грузовых поездов, соответственно. Следовательно, $I^P \cup I^F = I$. Требуется максимизировать количества поездов двух типов

$$\max:\{f^F, f^P\} \tag{1}$$

при следующих условиях:

1. Пропускная способность в зависимости от грузовых сервисов

$$f^F = \sum_{c \in C} \sum_{i \in I^F} \left(\overrightarrow{M}_{ic} \vec{x}_{ic} + \overleftarrow{M}_{ic} \overleftarrow{x}_{ic} \right) \tag{2}$$

где $\overrightarrow{M}_{ic}, \overleftarrow{M}_{ic}$ – коэффициенты, отвечающие за перевозимые количества груза.

2. Пропускная способность в зависимости от пассажирских сервисов

$$f^P = \sum_{c\in C}\sum_{i\in I^P}(\vec{x}_{ic} + \overleftarrow{x}_{ic}) \quad (3)$$

3. Неотрицательноть переменных

$$\vec{x}_{ic}, \overleftarrow{x}_{ic} \geq 0 \ \forall i \in I, \forall c \in C \quad (4)$$

Ограничение (4) говорит о том, что количество поездов должно быть неотрицательным.

4. Насыщенность секции

$$\sum_{i\in I}(\vec{y}_{is}\vec{T}_{is} + \overleftarrow{y}_{is}\overleftarrow{T}_{is}) \leq T \times \tau_s \forall s \in S \quad (5)$$

Группа неравенств (5) говорит о том, что суммарное время, которое все поезда тратят на проезд по определенной секции с учетом количества путей в этой секции не превышает общего времени работы модели.

5. Использование секции:

$$\vec{y}_{is} = \sum_{c\in C|s\in\Omega_c}(\vec{x}_{ic}); \ \overleftarrow{y}_{is} = \sum_{c\in C|s\in\Omega_c}(\overleftarrow{x}_{ic}) \quad (6)$$

Равенства (6) означают, что число поездов, проезжающих по секции в определенном направлении равно сумме поездов, проезжающих в этом же направлении по коридору, содержащему данную секцию.

$$\vec{x}_{ic} + \overleftarrow{x}_{ic} = \eta^F{}_{c,i}\sum_{j\in I^F}(\vec{x}_{jc} + \overleftarrow{x}_{jc}) \ \forall i \in I^F, \forall c \in C \quad (7)$$

$$\vec{x}_{ic} + \overleftarrow{x}_{ic} = \eta^P{}_{c,i}\sum_{j\in I^P}(\vec{x}_{jc} + \overleftarrow{x}_{jc}) \ \forall i \in I^P, \forall c \in C \quad (8)$$

Ограничения (7) – (8) учитывают заданную долю поездов, проезжающих по определенному коридору.

Заметим, что все переменные в данной задачи являются неотрицательными, причем изменяются они в ограниченной области пространства.

Обзор литературы

В основе данной работы лежит модель пропускной способности железнодорожной сети, сформулированная в статье [1]. В данной статье были рассмотрены такие методы для решения задачи, как метод линейной свертки критериев, метод изменения ограничений и адаптивный метод изменения ограничений. В качестве основного метода для решения, автором был выбран адаптивный метод изменения ограничений, реализованный на конкретном примере железнодорожной сети.

В данной работе рассматривается другой подход к решению данной задачи и построению множества Парето, а именно – с помощью аксиоматического подхода, а также применяется комбинированный подход к сужению множества Парето.

Терминология железнодорожной отрасли содержится в работах [2], [3].

Для решения задач оптимизации при нескольких критериев используются результаты монографии [4], в которой помимо основных понятий и аксиоматики многокритериальных моделей, также представлен подход с использованием количественной информации о значимости критериев для сужения множества Парето.

Общий алгоритм решения, представленный ниже, основан на результатах выпуклого анализа [5], [6]. Данный алгоритм был запрограммирован с помощью математического пакета MatLab.

В завершающей части работы использованы результаты статей [9], [10], в которых описаны различные комбинированные методы для сужения множества Парето.

Глава 1. Задача многокритериального выбора

Задачу определения пропускной способности железнодорожной сети можно решать в рамках теории принятия решений. Для этого рассмотрим основные понятия и аксиоматику задач многокритериального выбора, следуя [4].

1.1. Основные понятия и определения

При решении многокритериальной задачи, прежде всего, необходимо определить множество возможных решений (X) – множество, из которого осуществляется выбор. Данное множество должно содержать не менее двух элементов. Ограничения сверху для данного множества отсутствуют, оно может иметь как конечное число элементов, так и бесконечное.

Далее из множества возможных решений выделяется подмножество $C(X)$, которое называется множеством выбираемых решений. Нужно отметить, что в большинстве случаев выбирается не одно, а целый набор решений. Таким образом, для того, чтобы решить задачу выбора, необходимо найти множество $C(X), C(X) \subset X$.

Выбор осуществляет лицо, принимающее решение (ЛПР), которое преследует определенные цели, на математическом языке это выражается в виде максимизации (минимизации) некой числовой функции или набора таких функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), m \geq 2$, который определен на множестве X. Такие функции называются критериями эффективности или целевыми функциями.

Когда преследуется несколько целей одновременно, подобные числовые функции образуют векторный критерий $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, принимающий значения в пространстве m-мерных векторов R^m. Это пространство называют критериальным пространством.

Значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \in R^m$ векторного критерия f при $x \in X$ называют возможным вектором, отвечающим решению x. А все такие возможные векторы образуют множество возможных векторов

$$Y = f(X) = \{y \in R^m | y = f(x), \text{при некотором } x \in X\}. \quad (1.1)$$

В свою очередь, множеством выбираемых векторов $C(Y)$ называется подмножество критериалього пространства R^m

$$C(Y) = f\big(C(X)\big) = \{y \in Y | y = f(x), \text{при некотором } x \in C(X). \quad (1.2)$$

Рассмотрим два возможных решения x' и x''. Пусть из этих двух решений ЛПР выбирает x', тогда имеет место следующее соотношение $x' \succ_X x''$. В таком случае говорят, что решение x' доминирует решение x''.

Знак $\succ_X$ показывает выбор ЛПР и называется отношением строгого предпочтения (бинарным отношением предпочтения).

Нужно отметить, что ЛПР не всегда может однозначно определить свои предпочтения. Поэтому возможна только одна из следующих ситуаций:

1. справедливо $x' \succ_X x''$, но $x' \prec_X x''$ не выполняется;
2. справедливо $x' \prec_X x''$, но $x' \succ_X x''$ не выполняется;
3. оба соотношения $x' \prec_X x''$ и $x' \succ_X x''$ не выполняются, в данном случае решения по отношению предпочтения несравнимы.

Отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений X, порождает отношение предпочтения $\succ_Y$, заданное на множестве возможных векторов Y

$$f(x') \succ_Y f(x'') \Leftrightarrow x' \succ_X x'', \text{ для } \forall x', x'' \in X. \quad (1.3)$$

1.2. Принцип Эджворда-Парето

При решении задачи многокритериального выбора будем предполагать выполненным следующие требования

Аксиома 1.1 (исключения доминируемых решений)

Если для некоторой пары решений $x', x'' \in X$ имеет место соотношение $x' \succ_X x''$, то $x'' \notin C(X)$.

Приведенная выше аксиома ограничивает множество возможных решений, а именно, она говорит о том, что данное множество не содержит таких решений, для которых найдутся более предпочтительные.

Запишем аксиому 1.1 в терминах векторов:

<u>*Аксиома 1.2*</u> (исключение доминируемых векторов).

Если для некоторой пары векторов $y', y'' \in Y$ выполнено соотношение $y' \succ_Y y''$, то $y'' \notin C(Y)$.

<u>*Аксиома 2*</u> (транзитивности отношения предпочтения).

Отношение $\succ_Y$ $(\succ_X)$ является транзитивным. Кроме того, будем считать, то существует продолжение $\succ$ отношения $\succ_Y$ на все критериальное пространство R^m, которое также является транзитивным.

Аксиома 2 означает, что для любых трех векторов y', y''и y''' критериального пространства, при $y' \succ_Y y''$ и $y'' \succ_Y y'''$ будет выполнено $y' \succ_Y y'''$.

<u>*Определение 1*</u> Говорят, что i-критерий f_i согласован с отношением предпочтения $\succ$, если для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$, таких что

$$y' = (y'_1, \dots, y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m),$$

$$y'' = (y'_1, \dots, y^1_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, \dots, y'_m), \tag{1.4}$$

$$y'_i > y''_i,$$

выполнено $y' \succ y''$.

<u>*Аксиома 3*</u> (согласования критериев с отношением предпочтения)

Каждый из критериев $f_1, f_2, \dots, f_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$.

Согласованность критериев с отношением предпочтения говорит о том, что ЛПР при прочих равных условиях желает получить максимальные значения по каждому из критериев.

<u>*Определение 2*</u> Соотношения $f(x') \geq f(x'')$ означает, что каждая компонента вектора $f(x')$ больше либо равна соответствующей компоненты вектора $f(x'')$, причем хотя бы одна компонента первого вектора строго

больше соответствующей компоненты второго вектора. Бинарное отношение $\geq$ называют отношением Парето.

Если принять аксиомы 1, 2 и 3, то это влечет выполнение аксиомы Парето.

<u>*Аксиома Парето*</u> (в терминах решений)

Для всех пар решений $x', x'' \in X$, для которых имеет место неравенство $f(x') \geq f(x'')$, справедливо $x' \succ_X x''$.

<u>*Определение 3*</u> Множество парето-оптимальных решений обозначается $P_f(X)$ и задается равенством

$$P_f(X) = \{x^* |\ \nexists \text{ такого } x \in X, \text{что } f(x) \geq f(x^*)\}, \qquad (1.5)$$

а *множество парето-оптимальных* векторов $P(Y)$ определяется равенством

$$P(Y) = f\left(P_f(X)\right) = \{\, f(x^*) \in Y |\ \text{при некотором } x^* \in P_f(X). \qquad (1.6)$$

<u>*Аксиома 4*</u> (аксиома инвариантности отношения предпочтения)

Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.

Приведенная выше аксиома означает, что для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, удовлетворяющих условию $y' \succ y''$, выполняется соотношения $(y' + c) \succ (y'' + c)$, для любого вектора $c \in R^m$ и $\alpha y' \succ \alpha y''$, для любого числа α.

<u>*Принцип Эджворта-Парето*</u>

В условиях выполнения аксиом исключения и Парето для любого множества выбираемых решений $C(X)$ справедливо включение $C(X) \subset P_f(X)$.

Смысл этого принципа состоит в том: что если ЛПР ведет себя достаточно «разумно» (т.е. в соответствии с аксиомами исключения и Парето), то выбираемые им решения обязательно должны быть парето-оптимальными. При этом любое парето-оптимальное решение может оказаться выбранным.

1.3. Модель многокритериального выбора

Укажем основные составляющие задачи многокритериального выбора. Многокритериальная модель $< X, f, \succ_X >$ включает в себя:

1. множество возможных решений X;
2. векторный критерий $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, который принимает значения в пространстве m -мерных векторов R^m;
3. отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений X.

Решением данной задачи является множество выбираемых решений $C(X)$.

Приведенная ранее модель сформулирована в терминах решений. Также, данную задачу можно сформулировать в терминах векторов $\langle Y, \succ_Y \rangle$. В этом случае она будет включать:

1. множество возможных векторов $Y, Y \subset R^m$;
2. отношение предпочтения $\succ_Y$, заданное на множестве возможных векторов Y.

Решением задачи, записанной в векторной форме является множество выбираемых векторов $C(Y)$.

Глава 2. Общее решение задачи пропускной способности железнодорожной сети

В задаче определения пропускной способности железнодорожной сети в качестве целевых выступают функции (2) – (3), множество возможных решений X задается системой неравенств (4) – (8). Разумеется, считается, что аксиомы исключения и Парето выполнены, так что можно воспользоваться принципом Эджворта-Парето (см [4]).

2.1. Геометрическая структура множества ограничений

Нетрудно видеть, что ограничения (5) рассматриваемой задачи являются линейными неравенствами.

Рассмотрим систему нестрогих линейных неравенств общего вида

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \le b_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

Решением каждого из неравенств системы (2.1) является некоторое замкнутое полупространство. Оно представляет собой выпуклое и замкнутое множество. Более того, это множество является полиэдральным. Так как пересечение любого числа выпуклых и замкнутых множеств также выпукло и замкнуто, то множество, образованное системой (2.1) является выпуклым и замкнутым множеством. Боле того, оно представляет собой полиэдральное, а значит и конечнопорожденное множество.

Запишем систему неравенств (2.1) в матричном виде

$$Ax \le B \tag{2.2}$$

где A – матрица размерности $m \times n$, x – вектор размерности $1 \times n$, B – вектор размерности $1 \times m$.

Определим множество, заданное системой линейных неравенств (2.2)

$$M = \{x | Ax \leq B\} \tag{2.3}$$

Ранее было отмечено, что множество ограничений данной задачи представляет собой ограниченное множество. Поэтому все дальнейшие рассуждения будем приводить для ограниченного множества.

Определение 1 Множество (2.3) называется выпуклым многогранником (полиэдром).

Учитывая то, что ограниченное и замкнутое множество в R^n является компактным, можно воспользоваться следующим результатом, сформулированном в [5]:

Теорема 1 Любое ограниченное многогранное множество в R^n является выпуклой оболочкой своих угловых (крайних) точек.

Таким образом, множество, заданное системой (2.3) полностью задается своими угловыми точками.

Следуя [6], рассмотрим множество угловых точек

$$U = \{u | u \geq 0, Au = B\}, \tag{2.5}$$

где A – матрица размерности $m \times n$, $A \neq 0$, u – вектор размерности $1 \times n$ B – вектор размерности $1 \times m$.

Запишем систему (2.5) в следующей эквивалентной форме

$$A_1 u^1 + \cdots + A_n u^n = B, \tag{2.6}$$

где через A_j обозначен -столбец матрицы A.

Теорема 2 Пусть множество U определено условиями (2.5), $r = rangA$ – ранг матрицы A. Для того, чтобы $v = (v^1, \dots, v^n) \in U$ была угловой точкой множества U, необходимо и достаточно, чтобы существовали номера $j_1, \dots, j_r$ $(1 \leq j_l \leq n, l = 1, \dots, r)$ такие, что

$$A_{j_1} v^{j_1} + \cdots + A_{j_r} v^{j_r} = B, v^j = 0, j \neq j_l, l = 1, \dots, r, \tag{2.7}$$

причем столбцы $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$ линейно независимы.

На основе этого утверждения далее будут найдены угловые точки множества, заданного ограничениями рассматриваемой задачи о пропускной способности железнодорожной сети.

2.2. Структура и построение множества возможных векторов

Найдем отображение множества возможных решений X в критериальное пространство Y с помощью линейного преобразования F. В качестве критериев в задаче пропускной способности железнодорожной сети выступают линейные функции (2) – (3).

Исследуем вид множества Y, для чего воспользуемся следующими результатами выпуклого анализа [5]:

Пусть $\mathcal{F}$ – линейное отображение из R^n в R^m.

Предположим

$$\mathcal{F}C = \{\mathcal{F}x | x \in C\}, C \subset R^n \tag{2.8}$$

$$\mathcal{F}^{-1}D = \{x | \mathcal{F}x \in D\}, D \subset R^m \tag{2.9}$$

$\mathcal{F}C$ называется образом множества C, а $\mathcal{F}^{-1}D$ – прообразом множества D относительно $\mathcal{F}$.

Теорема 1 Пусть $\mathcal{F}$ – линейное отображение из R^n в R^m. Тогда множества $\mathcal{F}C$ и $\mathcal{F}^{-1}D$ многогранны, если C и D – многогранные множества в пространствах R^n и R^m, соответственно.

Таким образом, линейное отображение многогранного множества также является многогранным множеством. Учитывая, что в конечномерном пространстве непрерывное отображение компакта есть компакт и, воспользовавшись результатами параграфа 2.1, можно сказать, множество Y также, как и множество X является выпуклой оболочкой конечного числа своих угловых точек и полностью определяется ими.

2.3. Алгоритм нахождения множества возможных решений

Итак, множество возможных решений X представляет собой многогранник, который задается своими вершинами. Поэтому задача определения этого множества сводится к поиску угловых точек данного множества.

После нахождения угловых точек множества возможных решений подействуем на них линейными критериями (целевой векторной функцией). Поскольку линейный образ выпуклого многогранника также является выпуклым многогранником, то найденные таким образом точки порождают множество возможных векторов Y, которое, в свою очередь, является выпуклой оболочкой своих угловых точек и полностью задается ими. Так как поставленная задача содержит две целевые функции, множество возможных векторов задается выпуклым многоугольником на плоскости и допускает наглядное представление.

После построения множества возможных решений и векторов можно построить множество Парето.

Алгоритм нахождения множества всех парето-оптимальных векторов рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

1. Подставляя равенства (6) в неравенства (5) получаем систему ограничений вида (2.2);
2. Преобразуем полученные неравенства в равенства путем добавления искусственных переменных и, учитывая ограничения (7) – (8), получаем систему линейных уравнений вида $Ax = B$;
3. Найдем ранг матрицы A;
4. Выделим из матрицы A все возможные квадратные подматрицы размерностью ранга матрицы A, и при условии, что выделенная матрица является невырожденной, с помощью (2.6) методом Крамера найдем угловые точки множества возможных решений;

5. На полученные угловые точки действуем двумерным векторным критерием (2) – (3). Это будут угловые точки множества возможных векторов.
6. Среди них путем попарного сравнения по отношению Парето выделяем парето-оптимальное множество $P(Y)$.

2.4. Задача определения пропускной способности на определенном участке железнодорожной сети России

Рассмотрим следующую модель, представленную на Рис.2.1.

В основе данной модели лежит сеть железнодорожных путей, соединяющая следующие крупные пункты Санкт–Петербург → Луга → Псков → Новгород → Волховстрой, Псков → Великие Луки → Москва. [1]

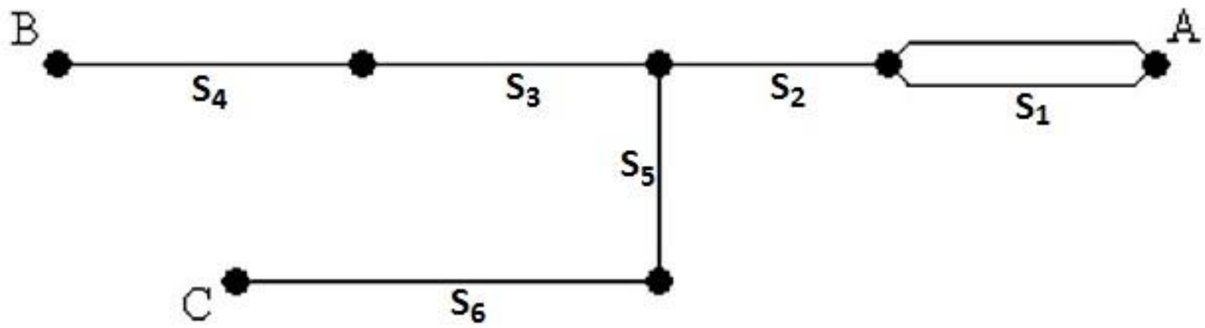

Рис. 2.1 Железнодорожная сеть

Данная модель имеет следующие параметры:

Коридоры: $C = \{AB,\ AC,\ AD\} = \{1, 2, 3\}$.

Секции: $S = \{S_1, \dots, S_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Множество секций в коридоре: $\Omega_C = \{\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3\}$; $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ $\Omega_2 = \{1, 2, 5, 6\}$, $\Omega_3 = \{3, 4, 5, 6\}$.

Количество путей в каждой секции: $\tau_s = \{\tau_1, \dots, \tau_6\} = \{2, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

Множество типов поездов: $I = \{1, 2, 3\}$, $I^F = \{1\}$, $I^P = \{2, 3\}$.

[1] В связи с вычислительной мощностью используемого ПК, из данной сети исключены мелкие промежуточные пункты. По данным с сайта https://www.gdevagon.ru/scripts/info/map.php

Скорости $V_i = \{V_1,\ V_2,\ V_3\} = \{40, 70, 200\}$ (км/ч) для $I = \{1, 2, 3\}$ соответственно.

Длина секций: $L_s = \{L_1, \dots, L_6\} = \{150, 140, 230, 185, 300, 500\}$ (км).

Доля поездов каждого типа на каждом коридоре:

$$\eta^F{}_{ci} = \{\eta^F{}_{11}, \eta^F{}_{12}, \eta^F{}_{13}\} = \{[1], [1], [1]\};$$

$$\eta^P{}_{ci} = \{[\eta^P{}_{21};\ \eta^P{}_{31}], [\eta^P{}_{22};\ \eta^P{}_{32}], [\eta^P{}_{23};\ \eta^P{}_{33}]\} = \{[0{,}9;\ 0{,}1], [0{,}85;\ 0{,}15], \quad [0{,}95;\ 0{,}05]\}$$

Предположим, что требуется определить максимальное число поездов, которые могут пройти через сеть за время $T = 24$ часа.

Примем следующие допущения:

1. Количество поездов проезжающих по коридору в одном направлении равно количеству поездов проезжающих по тому же коридору в обратном направлении, т.е. $\vec{x}_{ic} = \overleftarrow{x}_{ic} = x_{ic}$;
2. Количество перевозимых товаров не значительно, тогда $\vec{M}_{ic} = \overleftarrow{M}_{ic} = 1$ и f^F будет равно числу грузовых поездов;
3. Время, затраченное на секцию в каждом в одном направлении равно времени, затраченном на эту же секцию в другом направлении, т.е. $\vec{T}_{is} = \overleftarrow{T}_{is} = T_{is}$.

Таким образом, получаем следующую модель:

$$max: \{f^F, f^P\} \tag{2.10}$$

Пропускная способность в зависимости от грузовых сервисов:

$$f^F = \sum_{c=1}^{3} (\vec{x}_{1c} + \overleftarrow{x}_{1c}) = 2(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \tag{2.11}$$

Пропускная способность в зависимости от пассажирских сервисов:

$$f^P = \sum_{c=1}^{3} \sum_{i=2}^{3} (\vec{x}_{ic} + \overleftarrow{x}_{ic}) = 2(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}) \tag{2.12}$$

Ограничения на переменные:

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0,$$
$$x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0, \quad (2.13)$$
$$x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0, x_{33} \geq 0$$

Насыщенность секции:

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\vec{y}_{is}\vec{T}_{is} + \overleftarrow{y}_{is}\overleftarrow{T}_{is}\right) = 2y_{is}T_{is} \leq 24 \times \tau_s \quad \forall s \in S \quad (2.14)$$

$$s_1: 7{,}6y_{11} + 4{,}2y_{21} + 1{,}6y_{31} \leq 48$$
$$s_2: 7y_{12} + 4y_{22} + 1{,}4y_{32} \leq 24$$
$$s_3: 11{,}6y_{13} + 6{,}6y_{23} + 2{,}4y_{33} \leq 24$$
$$s_4: 9{,}2y_{14} + 5{,}2y_{24} + 1{,}4y_{34} \leq 24$$
$$s_5: 15y_{15} + 8{,}6y_{25} + 3y_{35} \leq 24$$
$$s_6: 25y_{16} + 14{,}2y_{26} + 5y_{36} \leq 24$$

Использование секции:

$$\vec{y}_{is} = \sum_{c \in C | s \in \Omega_c} \left(\vec{x}_{ic}\right) = \overleftarrow{y}_{is} = \sum_{c \in C | s \in \Omega_c} \left(\overleftarrow{x}_{ic}\right) = y_{is} = \sum_{c \in C | s \in \Omega_c} \left(x_{ic}\right) \quad (2.15)$$

$$y_{11} = x_{11} + x_{12};\ y_{21} = x_{21} + x_{22}; y_{31} = x_{31} + x_{32}$$
$$y_{12} = x_{11} + x_{12};\ y_{22} = x_{21} + x_{22}; y_{32} = x_{31} + x_{32}$$
$$y_{13} = x_{11} + x_{13};\ y_{23} = x_{21} + x_{23}; y_{33} = x_{31} + x_{33}$$
$$y_{14} = x_{11} + x_{13};\ y_{24} = x_{21} + x_{23}; y_{34} = x_{31} + x_{33}$$
$$y_{15} = x_{12} + x_{13};\ y_{25} = x_{22} + x_{23}; y_{35} = x_{32} + x_{33}$$
$$y_{16} = x_{12} + x_{13};\ y_{26} = x_{22} + x_{23}; y_{36} = x_{32} + x_{33}$$

$$\vec{x}_{ic} + \overleftarrow{x}_{ic} = \eta_{ci}^{F} \sum_{j \in I^F} \left(\vec{x}_{jc} + \overleftarrow{x}_{jc}\right) = \eta_{ci}^{F} \sum_{j \in I^F} \left(x_{jc}\right) \ \forall i \in I^F, \forall c \in C \quad (2.16)$$

$$\vec{x}_{ic} + \overleftarrow{x}_{ic} = \eta_{ci}^{P} \sum_{j \in I^P} \left(\vec{x}_{jc} + \overleftarrow{x}_{jc}\right) = \eta_{ci}^{P} \sum_{j \in I^P} \left(x_{jc}\right) \ \forall i \in I^P, \forall c \in C \quad (2.17)$$

$$x_{21} = 0{,}9(x_{21} + x_{31})$$
$$x_{31} = 0{,}1(x_{21} + x_{31})$$
$$x_{22} = 0{,}85(x_{22} + x_{32})$$
$$x_{32} = 0{,}15(x_{22} + x_{32})$$

$$x_{23} = 0{,}95(x_{23} + x_{33})$$

$$x_{33} = 0{,}05(x_{23} + x_{33})$$

Далее подставляем (2.15) в (2.14) и получаем следующую систему ограничений:

$$7{,}6x_{11} + 7{,}6x_{12} + 4{,}2x_{21} + 4{,}2x_{22} + 1{,}6x_{31} + 1{,}6x_{32} \leq 48$$

$$7x_{11} + 7x_{12} + 4x_{21} + 4x_{22} + 1{,}4x_{31} + 1{,}4x_{32} \leq 24$$

$$11{,}6x_{11} + 11{,}6x_{13} + 6{,}6x_{21} + 6{,}6x_{23} + 2{,}4x_{31} + 2{,}4x_{33} \leq 24$$

$$9{,}2x_{11} + 9{,}2x_{13} + 5{,}2x_{21} + 5{,}2x_{23} + 1{,}4x_{31} + 1{,}4x_{33} \leq 24$$

$$15x_{12} + 15x_{13} + 8{,}6x_{22} + 8{,}6x_{23} + 3x_{32} + 3x_{33} \leq 24$$

$$25x_{12} + 25x_{13} + 14{,}2x_{22} + 14{,}2x_{23} + 5x_{32} + 5x_{33} \leq 24$$

$$0{,}1x_{21} - 0{,}9x_{31} = 0$$

$$0{,}15x_{22} - 0{,}85x_{32} = 0$$

$$0{,}05x_{23} - 0{,}95x_{33} = 0$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0, x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0, x_{33} \geq 0.$$

Преобразуем неравенства в равенства с помощью добавления искусственных переменных и запишем в виде расширенной матрицы, учитывая следующий порядок: $x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{31}\ x_{32}\ x_{33}$:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc|c}
7.6 & 7.6 & 0 & 4.2 & 4.2 & 0 & 1.6 & 1.6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \\
7 & 7 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1.4 & 1.4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\
11.6 & 0 & 11.6 & 6.6 & 0 & 7.6 & 2.4 & 0 & 2.4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 24 \\
9.2 & 0 & 9.2 & 5.2 & 0 & 5.2 & 1.4 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 24 \\
0 & 15 & 15 & 0 & 8.6 & 8.6 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\
0 & 25 & 25 & 0 & 14.2 & 14.2 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 24 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & -0.85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & -0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Ранг полученной матрицы равен 9. Для поиска угловых точек из полученной матрицы выделялись все возможные матрицы размерностью $[9 \times 9]$ и при условии, что полученная матрица является невырожденной, с помощью метода Крамера было найдено ее решение.

В результате получили, что матрица А имеет 2850 комбинаций линейно независимых столбцов. Поиск вершин множества, заданного ограничениями задачи, дал 866 точек, уникальных из которых – 168.

Следующим шагом, воздействуя двумерным векторным критерием F на полученное множество, получаем множество возможных векторов, содержащее 29 точек на плоскости.

Алгоритм поиска этих точек был запрограммирован в среде MatLab. Полный код программы представлен в Приложении 1.

Далее из множества возможных векторов было выделено множество Парето, которое содержит следующие точки:

$$P(Y) = \{y^1, y^2, y^3, y^4, y^5\} = \{(33;0),(30;6),(28;7),(23;8),(8;9)\}.$$

На Рис. 2.1 изображена выпуклая оболочка множества возможных векторов и выделены точки, соответствующие множеству Парето.

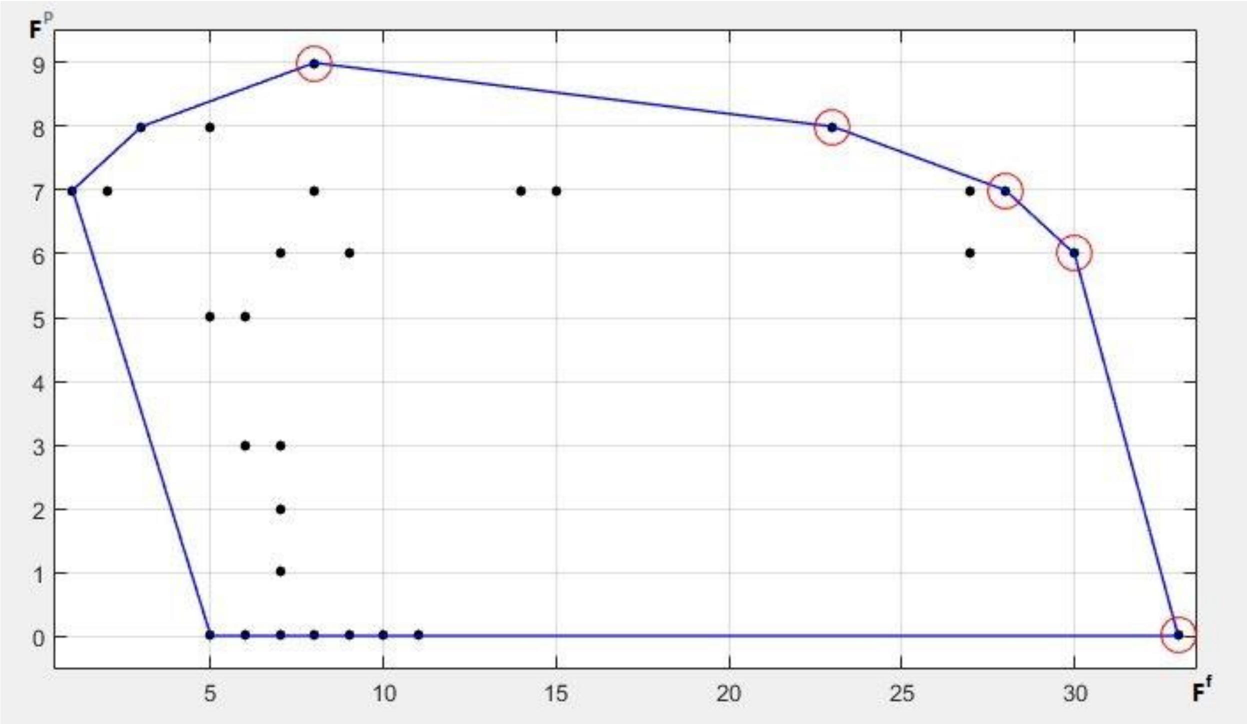

Рис. 2.2. Множество возможных векторов и множество Парето.

Глава 3. Сужение множества Парето

При решении многокритериальной задачи оптимизации пропускной способности железнодорожной сети был использован принцип Эджворта-Парето, согласно которому выбирались только парето-оптимальные решения. Однако в большинстве задач с несколькими критериями множество Парето обычно имеет более чем одно решение, и окончательный выбор из этого множества является довольно затруднительным. В связи с этим возникает «проблема сужения множества Парето». Таким образом, решение исходной задачи, т.е. нахождение множества выбираемых векторов, можно трактовать как сужение множества Парето до искомого множества $C(Y)$. Такое сужение будет обоснованным только при наличии дополнительной информации о предпочтениях лица, принимающего решение.

3.1. Сужение множества Парето при помощи квантов информации

На первом этапе одним из наиболее удобных методов сужения множества Парето является сужение при помощи простейшего кванта информации. Информация подобного типа указывает на то, какой из пары парето-оптимальных решений предпочтительнее для ЛПР по сравнению с другим. Квант информации такого рода позволяет исключить одно из решений, и тем самым, упростить дальнейший выбор окончательного варианта.

Пусть $I = \{1,2, \dots ,m\}$ – множество номеров критериев. Следуя монографии [4], приведем необходимые сведения из аксиоматической теории сужения множества Парето.

Определение 1 Пусть $i, j \in I, i \neq j$. Будем говорить, что задан простейший квант информации об отношении предпочтения ЛПР с заданными положительными параметрами w_i^*, w_j^*, если для всех векторов $y', y'' \in R^m$, для которых выполняется

$$y_i' > y_i'', \quad y_j'' > y_j', \quad y_s' = y_s'' \text{ для всех } s \in I \setminus \{i,j\},$$

$$y_i' - y_i'' = w_i^*, \quad y_j'' - y_j' = w_j^*, \tag{3.1}$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Смысл этого определения состоит в том, что ЛПР готово пойти на компромисс и пожертвовать в размере не более w_j^* единиц по второму (менее значимому) критерию, чтобы получить прибавку не менее чем w_i^* единиц по первому (более значимому) критерию.

<u>*Определение 2*</u> Пусть $i,j \in I, i \neq j$ и имеется простейший квант информации с положительными параметрами w_i^*, w_j^*. В этом случае число

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} = \frac{1}{w_i^*/w_j^* + 1} \in (0,1) \tag{3.2}$$

называется коэффициентом (или степенью) компромисса для указанной пары критериев.

<u>*Теорема 2*</u> В определении 1 можно считать, что векторы y', y'' фиксированы

Воспользуемся следующей теоремой, сформулированной в [4], показывающей, каким образом происходит сужение области поиска при помощи дополнительной информации, представленной в виде простейшего кванта информации об отношении предпочтения ЛПР.

<u>*Теорема 2*</u> (в терминах векторов) Предположим, что имеется простейший квант информации с положительными параметрами w_i^*, w_j^* (с коэффициентом компромисса $\theta_{ij} \in (0,1)$) Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливы включения

$$C(Y) \subset P_g(Y) \subset P(Y), \tag{3.3}$$

где $P_g(Y)$ – множество возможных векторов, соответствующих множеству парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений X и «новым» векторным критерием $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$, т.е. $P_g(Y) = f(P_g(X))$, компоненты которого вычисляются по формулам

$$g_j = w_j^* f_i + w_i^* f_j, \quad g_s = f_s \text{ для всех } s \in I \backslash \{j\} \tag{3.4}$$

или

$$g_j = \theta_{ij} f_i + \left(1 - \theta_{ij}\right) f_j, \quad g_s = f_s \text{ для всех } s \in I \backslash \{j\}. \tag{3.5}$$

Таким образом, при выявлении информации о предпочтениях ЛПР в виде кванта строится новый векторный критерий $g = (g_1, g_2, \dots, g_p)$, $p \geq m$, при котором выполняются включения

$$C(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X), \quad C(Y) \subset P_g(Y) \subset P(Y) \tag{3.6}$$

Вернемся к нашей задаче о пропускной способности железнодорожной сети. Предположим, что, исходя из предпочтений ЛПР, было установлено, что второй критерий является более значимым чем первый, причем при потере не более двух единицы по первому критерию желательно получить прибавку в размере не менее трех единиц по второму критерию. В таком случае имеется квант информации с параметрами $w_1^* = 2, w_2^* = 3$ и, соответственно, коэффициент компромисса равен $\theta_{21} = 0{,}6$. С геометрической токи зрения, рассмотренный квант информации означает, что $y' = \binom{-2}{3}$.

Воспользовавшись Теоремой 1 данного параграфа, можно составить новый векторный критерий

$$\begin{cases} g_1 = 0{,}6y_1 + 0{,}4y_2 \\ \qquad g_2 = y_2 \end{cases}$$

После применения нового векторного критерия к множеству Парето получим следующее множество:

$$P_g(Y) = \{(19{,}8; 0), (20{,}4; 6), (19{,}6; 7), (17; 8), (8{,}4; 9)\}.$$

Вектор y^1 можно удалить, так как он не является парето-оптимальными. Таким образом, с помощью кванта информации удалось сузить исходное множество Парето до $\{y^2, y^3, y^4, y^5\}$.

Любое отношение предпочтения, удовлетворяющее введенной аксиоматике является конусным с острым выпуклым конусом, содержащим неотрицательный ортант R_+^m и не содержащим начало координат, а наличие кванта информации позволяет выделить более широкую часть, чем R_+^m.

Данную ситуацию иллюстрирует Рис.3.1, с помощью которого наглядно видно, что для вектора y^1 имеется доминирующий вектор y^2.

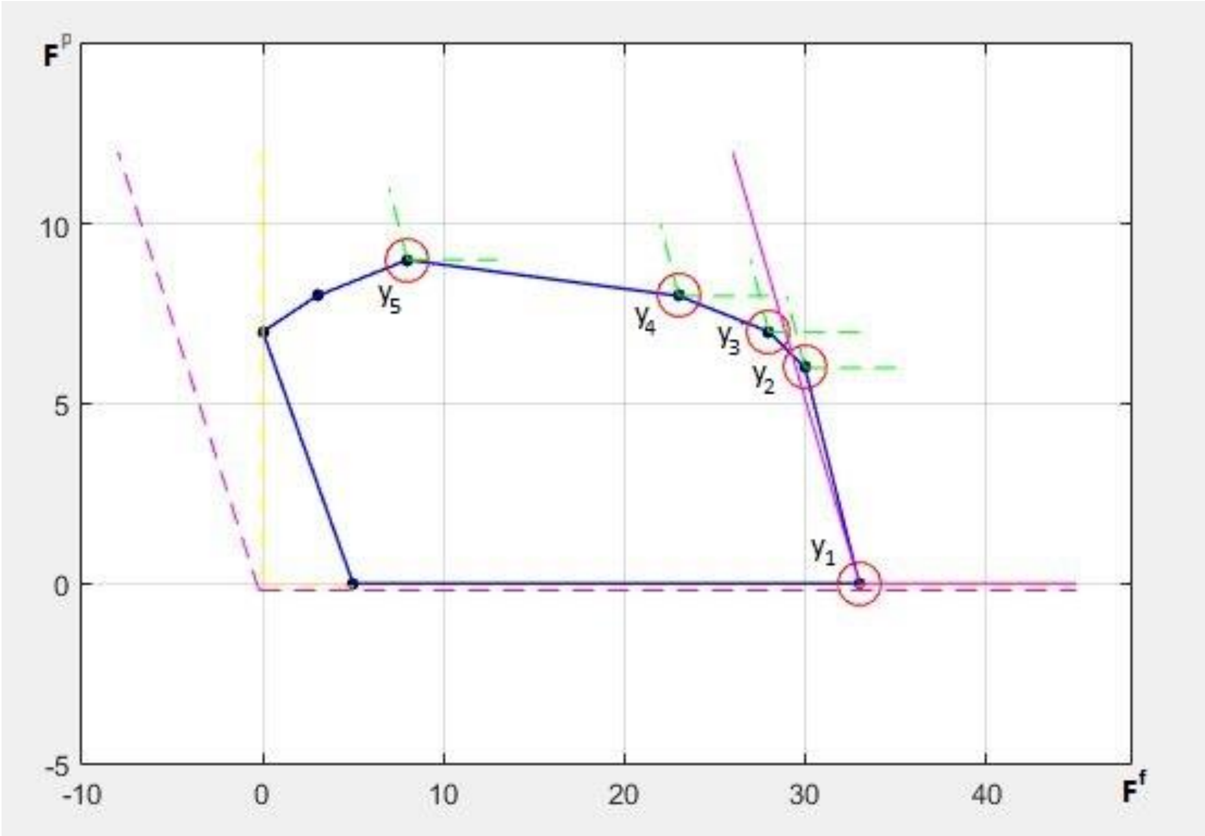

Рис. 3.1. Визуализация использования кванта информации.

Так как размеры полученного множества $P_g(Y)$ не позволяют осуществить окончательный выбор, то на втором этапе для дальнейшего сужения множества $P_g(Y)$ воспользуемся тремя наиболее применяемыми методами и сравним полученные результаты.

3.2. Сужение при помощи метода линейной свертки

В основе метода линейной свертки лежит задание неотрицательных, а большинстве случаев положительных, коэффициентов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, и последующая максимизация линейной комбинации критериев $\sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$ на множестве X, что подтверждает следующая теорема, сформулированная в монографии [9].

<u>*Теорема 1*</u> Пусть множество $P(Y) = \{y^* \in R^m | \, y_i^* \leq y_i, \; i = 1,2, \dots, m,$ при некотором $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y\}$ является выпуклым. Тогда для того,

чтобы вектор $y^0 \in Y$ был парето-оптимальным, необходимо существование набора неотрицательных чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, при которых имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \, y_i^0 = \max_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \mu_i \, y_i \tag{3.7}$$

Обратно, выполнение равенства (3.6) при некоторых положительных $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, влечет парето-оптимальность вектора $y^0 \in Y$.

При решении многокритериальных задач нередко возникает проблема назначения компонент вектора μ. Именно поэтому удобно использовать комбинированный подход и обращаться к методу линейной свертки на втором шаге сужения множества Парето, так как неравнозначность критериев уже была учтена при использовании кванта информации и весовые коэффициенты можно выбрать одинаковыми.

Воспользуемся следующим результатом, сформулированным в [9].

Теорема 2 Пусть имеется некоторый конечный непротиворечивый набор квантов информации об отношении предпочтения ЛПР и $g = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ есть вектор-функция, которая участвует в (3.6). Предположим, что множество $X \subset R^n$ выпукло, а вектор-функция f покомпонентно вогнута на нем. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ имеет место включение

$$C(X) \subset \bigcup_{\mu} \{x^* \in X | \sum_{i=1}^{p} \mu_i \, g_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{p} \mu_i \, g_i(x), \tag{3.8}$$

где вектор μ принимает свои значения в пределах множества

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1. \tag{3.9}$$

Таким образом, значение $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}5$.

Если согласно теореме 2 решить задачу максимизации $\sum_{i=1}^{2} 0{,}5 \, g_i(x)$, то получаем, что решением, удовлетворяющим данному условию является вектор y^3.

3.2. Сужение при помощи метрики Чебышева

Сужение при помощи метрики Чебышева основано на необходимом и достаточном условии слабой эффективности. Приведем необходимые определения.

Слабо эффективной называется такая точка $x^* \in X$, для которой не существует такого $x \in X$, что $f(x) > f(x^*)$.

Функция $\underset{i=1,\dots,m}{min}\ \mu_i f_i(x)$ называется взвешенной метрикой Чебышева (сверткой Гермейера).

В статье [10] были сформулированы следующие необходимые и достаточные условия слабой эффективности.

<u>*Теорема 1*</u> Зафиксируем произвольное число α. Вектор $y^* \in Y$ слабо эффективен относительно f тогда и только тогда, когда существует такой вектор $u \in R^m$, $\sum_{i=1}^{m} u_i = \alpha$, что

$$\underset{i=1,\dots,m}{max}\ (u_i - y_i^*) \ \leq \underset{i=1,\dots,m}{max}\ (u_i - y_i),\text{ для всех } y \in Y. \qquad (3.10)$$

Данный результат предполагает ограниченность сверху всех критериев и является наиболее удобным в практическом применении.

Также в статье [10] была сформулирована следующая теорема, позволяющая на втором шаге сужения использовать метрику Чебышева.

<u>*Теорема 2*</u> Предположим, что выполнены аксиомы 1–4, имеется непротиворечивый набор квантов информации, учет которых производится на основе вектор-функции g и зафиксировано произвольное число α. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ выполняется

$$C(Y) \subset \bigcup_{\mu} \{f(x^*) \in Y |\ \underset{i=1,\dots,p}{max}\ (u_i - g_i(x^*)) = \underset{x \in X}{min}\ \underset{i=1,\dots,p}{max}\ (u_i - g_i(x))\}, \quad (3.11)$$

где вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$, удовлетворяющий условию $\sum_{i=1}^{p} u_i = \alpha$.

В качестве $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ выступают идеальные значения по каждому из критериев $u_i = \sup_{x \in X} g_i(x),\ \ i = 1,2, \dots, p$.

Здесь основная идея заключается в том, чтобы выбрать такой допустимый вектор, который окажется ближайшим к идеальному.

В качестве идеального выберем вектор, составленный из максимумов компонент векторов множества $P_g(Y)$. Таким образом, $u = (20{,}4;\ 9)$.

Согласно приведенной выше теореме, на втором этапе, решив задачу минимизации функции $\max\limits_{i=1,2}(u_i - g_i(x))$ на полученном множестве, приходим к единственному решению y^3, что подтверждает Рис.3.2.

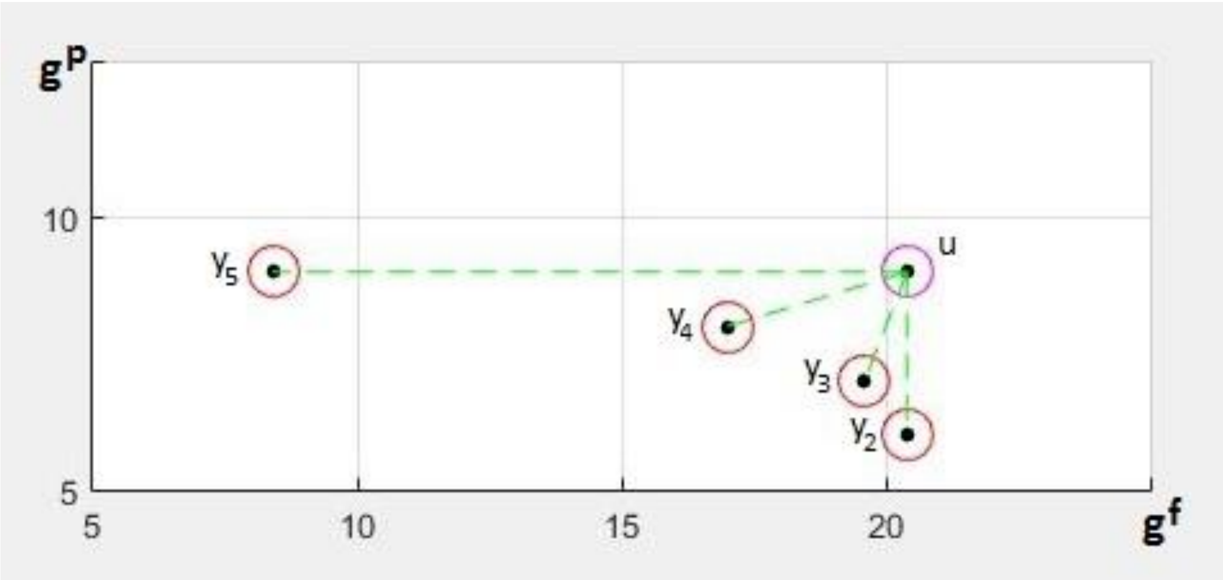

Рис. 3.2. Визуализация метода сужения с использованием метрики Чебышева.

3.3. Сужение при помощи евклидовой метрики

Как и в предыдущем случае, основная идея метода состоит в том, чтобы найти такой вектор из множества Y, который будет ближайшим к множеству U, но теперь, в качестве расстояния будем использовать обычную евклидову метрику $\|a - b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i - b_i)^2}$, для векторов $a, b \in R^m$.

Введем множество идеальных векторов.

$$U = \left\{u \in R^m \middle| u_i > \sup_{x \in X} f_i\,(x), i = 1,2, \dots, m\right\}. \quad (3.12)$$

Воспользуемся результатами, представленными в [10].

<u>*Теорема 1*</u> Допустим, что множество $X \subset R^n$ выпукло, а числовые функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ ограничены сверху и покомпонентно вогнуты на нем.

Точка $x^* \in X$ является собственно эффективной относительно f тогда и только тогда, когда существует вектор $u \in U$, для которого имеет место равенство

$$\|u - f(x^*)\| = \min_{x \in X} \|u - f(x)\|. \tag{3.13}$$

Собственно эффективной относительно f на множестве X, является такая парето-оптимальная точка $x^* \in X$, для которой найдется такое положительное число A, что для любых $i \in \{1,2, \dots ,m\}$, удовлетворяющих неравенству $f_i(x) > f_i(x^*)$, существует номер $j \in \{1,2, \dots ,m\}$ такой, что $f_j(x), < f_j(x^*)$, причем имеет место неравенство

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^*)}{(f_j(x^*) - f_i(x))} \leq A. \tag{3.14}$$

А, в свою очередь, $f(x^*)$ называют собственно эффективным вектором.

Теорема 2 Пусть выполнены аксиомы 1–4, задан набор квантов непротиворечивой информации, учет которых производится на основе вектор-функции g, множество $X \subset R^n$ выпукло, функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ ограничены сверху и покомпонентно вогнуты на нем. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ имеет место включение

$$C(Y) \subset cl\left(\bigcup_{u \in U} \{f(x^*) \in Y | \|u - g(x^*)\| = \min_{x \in X} \|u - g(x)\|)\}\right), \tag{3.15}$$

где $cl(A)$ означает замыкание множества (A).

В качестве множества идеальных векторов выберем $U = \{u \in R^2 | u_1 > 20{,}4, u_2 > 9\}$, а в качестве идеальной точки, можно взять $(21; 10)$. Согласно теореме 2 данного параграфа, используя евклидову метрику, можно найти расстояние от каждого вектора из множества $P_g(Y)$ до идеальной точки и выбрать минимальное из них. Таким образом, получили, что минимальным, будет расстояние до вектора y^3, что подтверждает Рис.3.3.

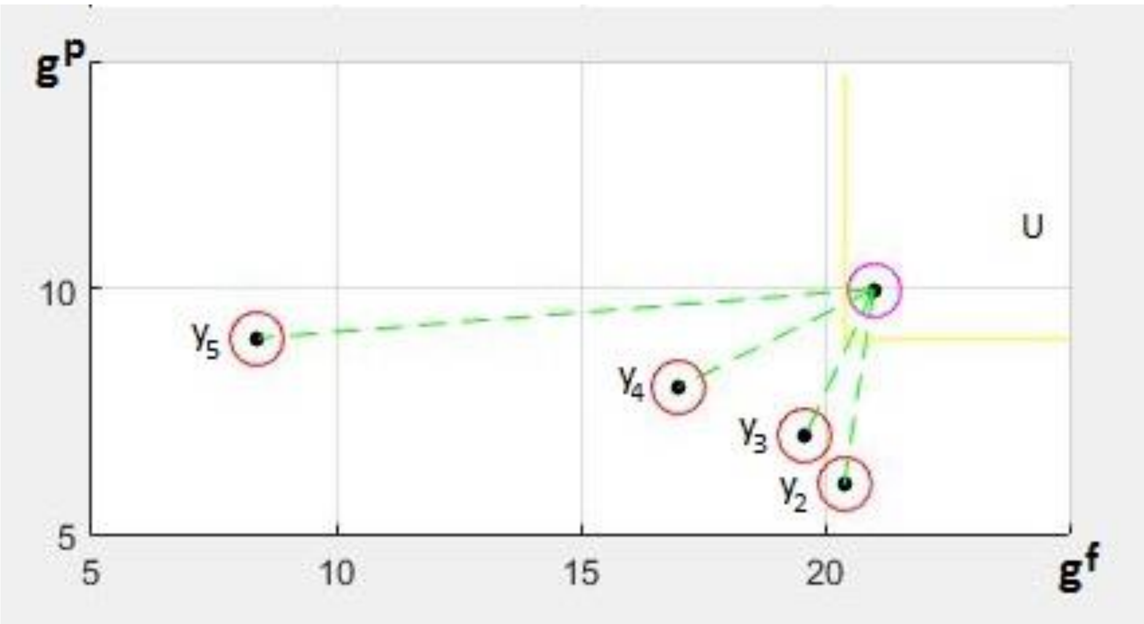

Рис. 3.2. Визуализация метода сужения с использованием евклидовой метрики.

3.4. Сравнение полученных результатов

В данной работе в рамках приведенной ранее задачи о пропускной способности на участке железнодорожной сети России для сужения множества Парето

$$P(Y) = \{(33;0),(30;6),(28;7),(23;8),(8;9)\},$$

был использован комбинированный подход, содержащий два этапа.

На первом этапе был применен аксиоматический метод сужения множества с использованием дополнительной информации об отношении предпочтения ЛПР в виде кванта, который позволил сузить парето-оптимальное множество до $P_g(Y) = \{y^2, y^3, y^4, y^5\}$ и удалить вектор y^1.

На втором шаге сравнивались такие методы, как линейная свертка критериев, сужение при помощи метрики Чебышева и сужение при помощи евклидовой метрики. Все три способа позволили сузить множество $P_g(Y)$ до одного элемента, причем каждый из методов привел к одному и тому же вектору y^3.

Хотелось бы отметить, что в данном случае, если отказаться от использования кванта информации на первом этапе сужения множества Парето, и использовать только методы, используемые на втором этапе, то выбор единственного решения будет довольно затруднительным, так как все эти методы приводят к различным решениям.

Заключение

В данной работе была рассмотрена бикритериальная задача максимизации пропускной способности железнодорожной сети, где в качестве цели выступает максимизация пропускной способности движения грузовых и пассажирских поездов одновременно. Целевые функции поставленной задачи имеют линейный вид, а ограничения выражены системой линейных неравенств, которые задают выпуклый многогранник. С помощью определенных результатов выпуклого анализа было установлено, что множество допустимых векторов задачи представляет собой выпуклый многоугольник, что позволяет сравнительно легко определить множество Парето и наглядно изобразить его на плоскости. Для построения множества парето-оптимальных векторов был разработан соответствующий алгоритм, основанный на определении конечного числа угловых точек многогранника.

Этот алгоритм был реализован с помощью математического пакета MatLab и применен при решении прикладной задачи определения пропускной способности на определенном участке железнодорожной сети России. В итоге было найдено все множество Парето.

В последней части работы рассмотрен комбинированный (двухэтапный) подход к сужению множества Парето, когда на первом этапе используется аксиоматический подход сужения множества Парето на основе кванта информации о предпочтениях ЛПР, а на втором этапе применялись такие известные методы, как линейная свертка критериев, сужение при помощи метрики Чебышева, а также при помощи эвклидовой метрики.

Список литературы

1. Burdett R.L. Multi-objective models and techniques for analyzing the absolute capacity of railway networks // European Journal of Operational Research №245, 2015. – 489–505с.
2. Burdett R.L., Kozan E. A disjunctive graph model and framework for constructing new train schedules // European Journal of Operational Research №200, 2010. – 85-98с.
3. Burdett R.L., Kozan E. Techniques for absolute capacity determination in railways // Transportation Research Part B №40 2006г. – 616–632с.
4. Ногин В.Д. Сужение множества Парето: аксиоматический подход – М.: Физматлит, 2016. – 272 с.
5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач – 2-е изд., переработ. и доп. - М.: Наука, 1988. - 552 с.
7. Ашманов С.А. Линейное программирование. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 340 с.
8. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения – М.: Радио и связь, 1981. — 560 с.
9. Подиновский В.В., Ногин В.Д. «Парето-оптимальные решения многокритериальных задач». М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 256 с.
10. Ногин В.Д. Сужение множества Парето на основе аксиоматического подхода с применением некоторых метрик // Журнал вычислительной математики и математической физики, том 57, №4, 2017. – 645-653 с.

Приложение 1

```
A=[0 0 0 0.1 0 0 -0.9 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0.15 0
0 -0.85 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0.05 0 0 -0.95 0 0 0
0 0 0 0; 7.6 7.6 0 4.2 4.2 0 1.6 1.6 0 1 0 0 0 0 0 0; 7
7 0 4 4 0 1.4 1.4 0 0 1 0 0 0 0 0; 11.6 0 11.6 6.6 0
6.6 2.4 0 2.4 0 0 1 0 0 0 0; 9.2 0 9.2 5.2 0 5.2 1.4 0
1.4 0 0 0 1 0 0 0; 0 15 15 0 8.6 8.6 0 3 3 0 0 0 0 1 0
0; 0 25 2 0 14.2 14.2 0 5 5 0 0 0 0 0 1 0];

B=[0; 0; 0; 24; 24; 24; 24; 24; 48];

[m, n] = size(A);
r = rank(A);
numvar = 9;

function [ solutions ] = fun1( A, B )

subcolumns = nchoosek(1:n, r);
subA = cellfun(@(columns) A(:, columns),
num2cell(subcolumns, 2), 'UniformOutput', false);

solutions = zeros(0, 0);
for k = 1:length(subA)
    currentA = cell2mat(subA(k));
    d = det(cell2mat(subA(k)));
    if d == 0
        fprintf('det == 0\n');
        continue
    end
    solutions(size(solutions, 1) + 1, :) = zeros(1, n);

    for i = 1:r
        solutions(size(solutions, 1), subcolumns(k, i))
= det([currentA(:, 1:i-1), B, currentA(:, i+1:r)]) / d;
    end
end
end

S = fun1(A,B);
disp(S);
S (:,numvar+1:size(S, 2))=[];
negativeRows = [ ];
for i = 1:size(S, 1)
for j = 1:size(S, 2)
```

```
  if S(i, j) < 0
    negativeRows(1, length(negativeRows) + 1) = i;
    break;
  end
end
end
S(negativeRows, :) = [ ];

S=unique(S3,'rows');

F1=2*S(:,1)+ 2*S(:,2)+ 2*S(:,3);
F2=2*S(:,4)+ 2*S(:,5)+ 2*S(:,6)+ 2*S(:,7)+ 2*S(:,8) +
2*4(:,9);
disp(F1);
disp(F2);

F=[F1';F2']';
F =ceil(F);

F=unique(F,'rows');
F1=F(:,1);
F2=F(:,2);

F1min=min(F1);
F1max=max(F1);
F2min=min(F2);
F2max=max(F2);

plot(F1,F2,'k.', 'MarkerSize',15);
hold on;
grid on;
axis([ F1min-0.5, F1max+0.5, F2min-0.5, F2max+0.5]);
kvert=convhull(F1,F2);
pause(0.3);
for k=2:length(kvert)
    plot([F1(kvert(k-1)) F1(kvert(k))],[F2(kvert(k-1))
F2(kvert(k))],'b','LineWidth',1);
    pause(0.3);
plot(33,0,'ro','MarkerSize',15);
plot(30,6,'ro','MarkerSize',15);
plot(28,7,'ro','MarkerSize',15);
plot(23,8,'ro','MarkerSize',15);
plot(8,9,'ro','MarkerSize',15);

end
```